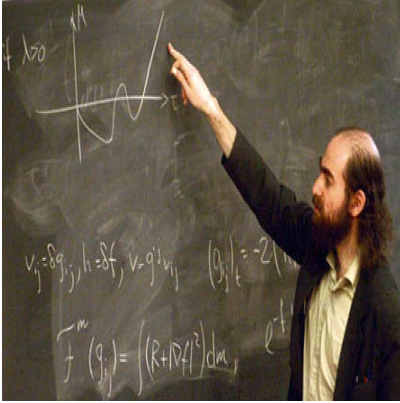




Wiskundige problemen blijven mysterie

Beschrijving

Ergens anders op deze site noemde ik al de belangrijkste millenniumproblemen van de wiskunde. Meer over dit onderwerp hier:

Slechts één van de zeven millenniumprijsproblemen die meer dan 20 jaar geleden werden genoemd, is opgelost. Het beantwoorden van de andere zou belangrijke nieuwe inzichten opleveren in de fundamentele wiskunde en zou zelfs reële gevolgen kunnen hebben voor technologieën zoals cryptografie.

Maar grote wiskundige vragen hebben niet vaak dezelfde belangstelling van buitenaf getrokken als mysteries op andere wetenschappelijke gebieden. Als het erom gaat te begrijpen hoe wiskundig onderzoek eruit ziet of wat het nut ervan is, staan veel mensen nog steeds met stomheid geslagen, zegt *Wei Ho*, een wiskundige aan de *Universiteit van Michigan*. Hoewel mensen de aard van haar werk vaak verkeerd begrijpen, hoeft het volgens Ho niet moeilijk te zijn om het uit te leggen.

“Mijn cocktailpartyspel gaat altijd over elliptische krommen”, voegt ze eraan toe. Ho vraagt feestgangers vaak: “Ken je parabolen en cirkels op de middelbare school? Als je eenmaal een derdegraads vergelijking begint te maken, wordt het echt moeilijk!” Er zijn zoveel open vragen over.

Een beroemd open probleem, *het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer*, betreft de aard van oplossingen voor vergelijkingen van elliptische krommen, en het is een van de zeven millenniumprijsproblemen die werden geselecteerd door de oprichtende wetenschappelijke adviesraad van het *Clay Mathematics Institute* (CMI). Het instituut omschrijft ze als “enkele van de moeilijkste problemen waarmee wiskundigen worstelden aan het begin van het tweede millennium.”

Tijdens een speciaal evenement in Parijs op 24 mei 2000 kondigde het instituut een prijs van \$ 1 miljoen aan voor elke oplossing of tegenvoorbeeld dat een van deze problemen voor het eerst effectief zou oplossen. De, in 2018 herziene, regels bepalen dat het resultaat “algemene acceptatie in de wereldwijde wiskundegemeenschap” moet bereiken.

De proclamatie van 2000 gaf voldoende reden voor mensen om aan de zeven problemen te werken:

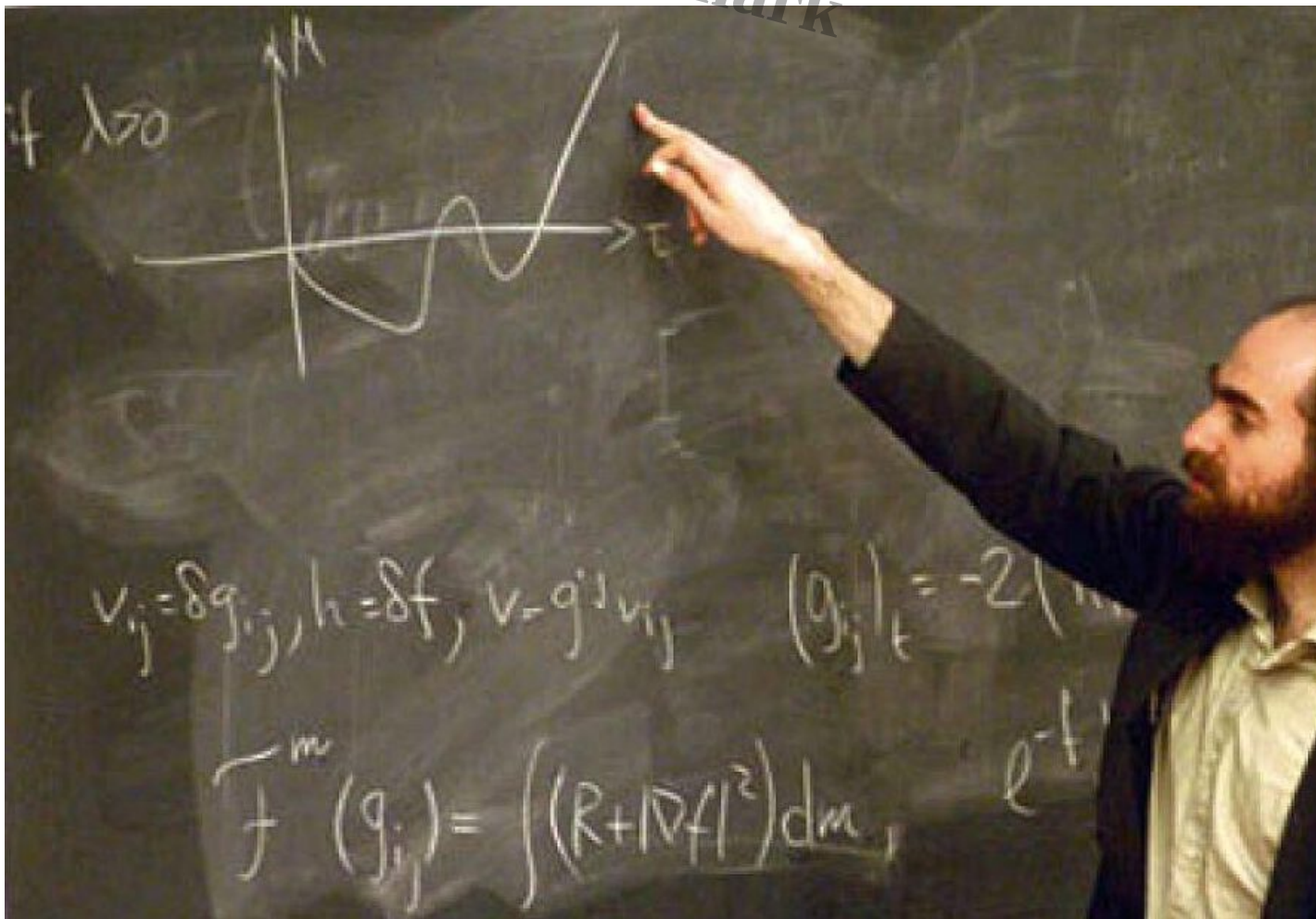
- Riemann hypothesis;
- Birch and Swinnerton-Dyer conjecture;
- P versus NP problem;
- Yang-Mills existence and mass gap problem;
- Poincaré conjecture;
- Navier-Stokes existence and smoothness problem;
- en Hodge conjecture.

Maar ondanks de fanfare en financiële prikkels is na ruim 20 jaar alleen het vermoeden van Poincaré opgelost.

Een onverwachte oplossing

In 2002 en 2003 deelde *Grigori Perelman*¹, een Russische wiskundige die toen verbonden was aan de afdeling St. Petersburg van het *Steklov Mathematisch Instituut van de Russische Academie van Wetenschappen*, online zijn oplossing van het vermoeden van Poincaré.

In 2010 kondigde CMI aan dat Perelman het vermoeden had bewezen en ondertussen ook het verwante vermoeden van wijlen wiskundige William Thurston had opgelost. (Perelman, die zich zelden met het publiek bezighoudt, wees het prijzengeld af.)

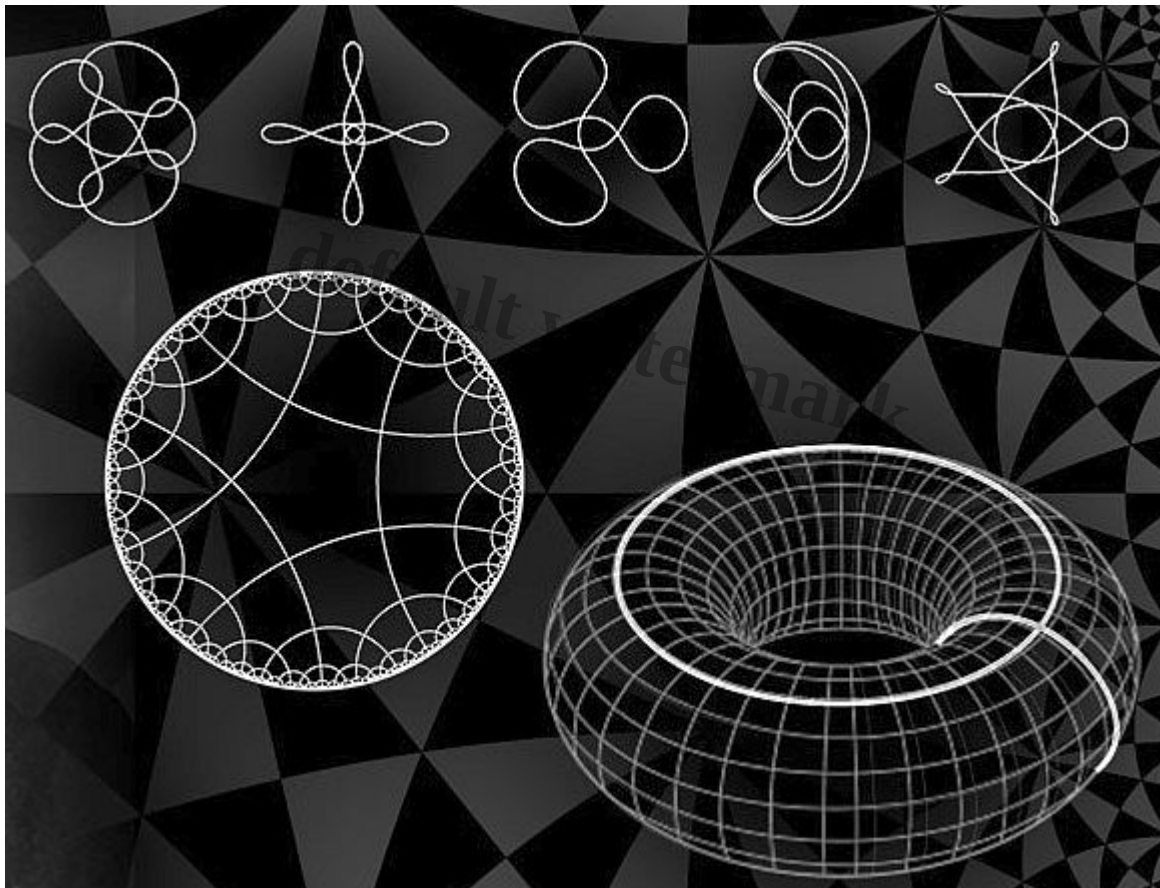


Grigori Perelman

Volgens CMI concentreert het vermoeden van Poincaré zich op een topologische vraag of bollen met driedimensionale oppervlakken – in wezen worden gekenmerkt – door een eigenschap die – eenvoudige connectiviteit – wordt genoemd (zie hieronder voor een eenvoudigere uitleg).

Martin Bridson, een wiskundige aan de *Universiteit van Oxford* en president van CMI, beschrijft het bewijs van Perelman als – een van de grote gebeurtenissen van, zeker, de afgelopen 20 jaar – en – een bekroning van ons begrip van wat drie -dimensionale ruimtes zijn. –

En de ontdekking zou in de toekomst tot nog meer inzichten kunnen leiden. – Voor het bewijs waren nieuwe hulpmiddelen nodig, die op hun beurt verreikende toepassingen bieden in wiskunde en natuurkunde –, zegt *Ken Ono*, een wiskundige aan de *Universiteit van Virginia*.



Een – visual – van het vermoeden van Poincaré

Ono heeft zich gefocust op een ander millenniumprobleem: de Riemann-hypothese, die betrekking heeft op priemgetallen en hun verdeling. In 2019 publiceerden hij en zijn collega's een paper in de *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* waarin een oude, voorheen verlaten aanpak voor het werken aan een oplossing, opnieuw werd onderzocht. In een begeleitend commentaar beschreef *Enrico Bombieri*, een wiskundige aan het *Institute for Advanced Study in Princeton, N.J.*, en in 1974 winnaar van de hoogste onderscheiding in de wiskunde, de Fields-medaille, het onderzoek als een – grote doorbraak –.

Toch zegt *Ono* dat het ongegrond zou zijn om zijn werk te omschrijven als – dat we op het punt staan de Riemann-hypothese te bewijzen –.

Vooruitgang op wat niet zal werken

Het feit dat slechts ∞ van de genoemde problemen is opgelost, is voor de experts niet verrassend. *“Het aantal problemen dat is opgelost is ∞ meer dan ik zou verwachten”, zegt Manjul Bhargava, een wiskundige aan de Princeton University en een 2014 Fields-medaillewinnaar. Bhargava zelf heeft meerdere recente resultaten gerapporteerd die verband houden met het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer, waaronder een waarin hij zegt dat hij en zijn collega’s “bewijzen dat meer dan 66 procent van de elliptische krommen voldoet aan het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer.”*

Geen van de problemen zal gemakkelijk op te lossen zijn, maar sommige kunnen bijzonder hardnekkig blijken te zijn. Het P versus NP-probleem lijkt zo moeilijk op te lossen dat Scott Aaronson, een theoretisch computerwetenschapper aan de Universiteit van Texas in Austin, het “een kenmerk van onze onwetendheid” noemt. Dit probleem betreft de vraag of vragen die gemakkelijk te verifiëren zijn (een klasse van vragen die NP wordt genoemd) ook oplossingen hebben die gemakkelijk te vinden zijn (een klasse die P wordt genoemd).

Aaronson heeft uitgebreid geschreven over het P versus NP-probleem. In een artikel dat in 2009 werd gepubliceerd, toonden hij en Avi Wigderson, een wiskundige en computerwetenschapper aan het Institute for Advanced Study en een van de winnaars van de Abelprijs 2021, een nieuwe barrière aan om te bewijzen dat de P-klasse niet hetzelfde is als de NP klas. De barrière die Aaronson en Wigderson vonden, is de derde die tot nu toe is ontdekt.

“Er is veel vooruitgang geboekt bij het laten zien welke benaderingen niet zullen werken”, zegt Virginia Vassilevska Williams, een theoretische computerwetenschapper en wiskundige aan het Massachusetts Institute of Technology. “Bewijzen dat P niet gelijk is aan NP, zou een belangrijke opstap zijn om aan te tonen dat cryptografie goed gefundeerd is”, voegt ze eraan toe. “Op dit moment is cryptografie gebaseerd op onbewezen aannames”, waaronder het idee dat P niet gelijk is aan NP. “Om aan te tonen dat je de cryptografische protocollen die mensen nodig hebben in moderne computers niet kunt breken”, inclusief protocollen die onze financiële en andere online persoonlijke informatie veilig houden, “moet je op zijn minst bewijzen dat P niet gelijk is aan NP”, merkt Williams op. “Als mensen hebben geprobeerd me vast te pinnen op een getal”, zegt Aaronson, “is het 97 procent of 98 procent kans dat P niet gelijk is aan NP.”

Mount Everest beklimmen

Het zoeken naar oplossingen voor de prijsproblemen is vergelijkbaar met de eerste keer proberen de Mount Everest te beklimmen, zegt Ono. *“Er zijn verschillende stappen onderweg die vooruitgang vertegenwoordigen”, voegt hij eraan toe. “De echte vraag is: kun je het basiskamp halen? En als je kunt, weet je nog steeds dat je heel ver nog moet gaan. Voor problemen zoals het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer en de Riemann-hypothese”, zegt Ono, “zijn we zeker in Nepal”* een van de landen van vertrek voor het beklimmen van de berg *“maar hebben we het basiskamp gehaald?”*

Wiskundigen hebben misschien nog steeds extra “uitrusting” nodig om naar de top te trekken. *“We proberen nu te achterhalen wat de wiskundige analogen zijn voor de hightech tools, de zuurstofflessen, die nodig zullen zijn om ons naar de top te helpen”, zegt Ono. “Wie weet hoeveel obstakels er zouden kunnen zitten tussen het huidige onderzoek en mogelijke oplossingen voor deze problemen? Misschien zijn het er wel 20. Misschien zijn we dichterbij dan we denken”, zegt Ono.*



Op weg naar de top van de Mount Everest

Ondanks de moeilijkheid van de problemen zijn wiskundigen optimistisch over de lange termijn. *“Ik hoop heel erg dat, terwijl ik president van het Clay-instituut ben, een van hen zal worden opgelost”*, zegt Bridson, die opmerkt dat CMI bezig is met het bedenken van strategieën om het bewustzijn over de problemen te blijven vergroten. *“Maar je moet accepteren dat het buitengewoon moeilijke problemen zijn die de rest van mijn leven de wiskunde kunnen blijven bepalen zonder dat ze worden opgelost.”*•

Het vermoeden van Poincaré in eenvoudige bewoordingen

Als je een elastiek rond het oppervlak van een appel spant, dan kunnen we het tot een punt verkleinen door het langzaam te bewegen, zonder het te scheuren en zonder het oppervlak te verlaten. Maar als je een elastiekje rond het oppervlak van een donut zou spannen, dan is er geen manier om het tot een punt te verkleinen zonder het elastiek of de donut te breken. Daarom is het oppervlak van een appel *“simpelweg verbonden”*•, en dat van de donut niet.

Ongeveer honderd jaar geleden wist Poincaré dat een tweedimensionale bol in wezen wordt gekenmerkt door deze eigenschap van eenvoudige connectiviteit. Hij stelde de overeenkomstige vraag voor de driedimensionale bol *“de verzameling punten in de vierdimensionale ruimte op*

eenheidsafstand van de oorsprong. Het blijkt dat dit een buitengewoon moeilijke vraag is om te beantwoorden.



Henri Poincaré (1854-1912)

e oplossing snel kan worden geverifieerd, ook snel kan worden opgelost. De informele term *snel* die hier wordt gebruikt, betekent het bestaan van een algoritme dat de taak oplost die in *polynomiale tijd*² wordt uitgevoerd, zodat de tijd om de taak te voltooien varieert als een polynoomfunctie op basis van de grootte van de invoer voor het algoritme (in tegenstelling tot, zeg maar, exponentiële tijd).

¹ Grigori Yakovlevich Perelman werd geboren op 13 juni 1966 en is een Russische wiskundige die bekend staat om zijn bijdragen op het gebied van geometrische analyse, Riemann-meetkunde en geometrische topologie.

Op 22 december 2006 erkende het wetenschappelijke tijdschrift Science Perelmans bewijs van het vermoeden van Poincaré als de wetenschappelijke â??doorbraak van het jaarâ?•, de eerste erkenning op het gebied van wiskunde.

² Het uitvoeren van een algoritme kan enige rekentijd in beslag nemen. Het hangt vooral af van hoe complex het algoritme is. Computerwetenschappers hebben een manier gevonden om het algoritme te classificeren op basis van het gedrag van het aantal bewerkingen dat het moet uitvoeren (meer bewerkingen nemen natuurlijk meer tijd in beslag).

Een van die klassen vertoont polynomiale tijdcomplexiteit.

Operationele complexiteit is evenredig met **nc**, terwijl **n** de invoergrootte is en **c** een constante is. Het is duidelijk dat de naam komt vanwege **nc**, wat een polynoom is.

Datum aangemaakt

2021/12/24