



De stelling van Bell

Beschrijving

De stelling of theorema van Bell is een naar *John Bell* genoemde stelling, die vereenvoudigd zegt dat kwantummechanica niet verklaard kan worden door verborgen *lokale* variabelen.

Nauwkeuriger: iedere "klassieke" theorie die gebruikmaakt van lokale, realistische (dat wil zeggen niet-stochastische) variabelen geeft meetbare resultaten die onverenigbaar zijn met de uitkomsten van de kwantummechanica.



John Bell (1928-1990)

Volgens de wiskunde

De stelling van Bell is zeker waar – het is echt een wiskundige relatie – en het is gemakkelijk te bewijzen. Beschouw een populatie waarvan de leden drie attributen hebben of niet, A, B en C. Een bepaald lid kan dus elke combinatie van die attributen hebben. De stelling van Bell stelt dat eenvoudigweg

$$N(A \& C) + N(B \& \sim C) \geq N(A \& B).$$

Hier betekent $N()$ een telling, $\sim$ –niet– en $\&$ betekent –en–. Om dit te bewijzen, vouwt u gewoon uit:

$$N(A \& C) = N(A \& \sim B \text{ en } C) + N(A \& B \& C)$$

$$N(B \& \sim C) = N(\sim A \& B \& \sim C) + N(A \& B \& \sim C)$$

$$N(A \& B) = N(A \& B \& \sim C) + N(A \& B \& C)$$

Dus de linkerkant van de ongelijkheid van Bell wordt dan

$$N(A \& C) + N(B \& \sim C) = N(A \& \sim B \text{ en } C) + N(A \& B \& C) + N(\sim A \& B \& \sim C) + N(A \& B \& \sim C)$$

en dit moet groter zijn dan de rechterkant:

$$N(A \& B) = N(A \& B \& \sim C) + N(A \& B \& C)$$

of

$$N(A \& \sim B \text{ en } C) + N(A \& B \& C) + N(\sim A \& B \& \sim C) + N(A \& B \& \sim C) \geq N(A \& B \& \sim C) + N(A \& B \& C)$$

Merk op dat beide termen aan de rechterkant ook aan de linkerkant verschijnen, zodat ze van beide kanten kunnen worden weggelaten

$$N(A \& \sim B \text{ en } C) + N(\sim A \& B \& \sim C) \geq 0$$

Aangezien $N()$ een telling vertegenwoordigt en dus niet negatief kan zijn, moet deze ongelijkheid gelden. En dan moet de oorspronkelijke bewering ook waar zijn. Dat is alles wat er is om de stelling van Bell te bewijzen.

Het echt interessante aspect van dit alles is de toepassing ervan op de kwantumtheorie, maar het bewijs is simpelweg de wiskunde die hierboven is uiteengezet.

Volgens de kwantummechanica

Volgens de kwantummechanica kunnen twee experimenten die tot in alle details dezelfde opzet hebben, toch verschillende uitkomsten geven.

Een voorbeeld is het sturen van een verticaal gepolariseerd lichtdeeltje door een polarisatiefilter dat een hoek van 45 graden met de verticaal maakt. Bij dit experiment zal in 50% van de gevallen blijken dat het lichtdeeltje wordt doorgelaten, terwijl in de overige 50% van de gevallen het lichtdeeltje wordt geabsorbeerd. Volgens de kwantummechanica is het niet mogelijk te voorspellen wat het lot van een individueel lichtdeeltje zal zijn, omdat alle lichtdeeltjes voor ze het filter bereiken volstrekt identiek zijn. Ze hebben geen onderscheidende eigenschap die bepaalt of ze al dan niet worden doorgelaten.

Vooraf in de beginjaren van de kwantummechanica zagen veel natuurkundigen dit als een teken dat de theorie niet volledig is. Zij stelden dat de uitkomsten van experimenten wel van tevoren vast moesten liggen, en bepaald werden door tot dan toe verborgen gebleven variabelen, de zogenaamde *hidden variables*.

Bijvoorbeeld: volgens *Einstein* was er een conflict tussen de volgende stellingen van de kwantummechanica:

- Bij een experiment kunnen twee deeltjes ontstaan met identieke eigenschappen, ook na langere tijd.
- De uitkomst van een meting aan een deeltje heeft een statistische onzekerheid die principieel niet te voorspellen is (dit bracht Einstein tot de uitspraak dat God niet dobbelt).
- Van een deeltje kan nooit tegelijk de positie en de impuls (massa x snelheid) nauwkeurig worden gemeten, de onzekerheidsrelatie van Heisenberg. Wordt de positie nauwkeurig bepaald, dan is de impuls onnauwkeurig, en andersom.

Einstein stelde zich in gedachte twee deeltjes *A* en *B* voor, die ieder een andere kant opvliegen tot ze op grote afstand van elkaar zijn. Als dan van *A* de snelheid wordt gemeten, is ook de snelheid van *B* bekend. Meet je tegelijk van *B* de positie, dan weet je van *B* zowel de snelheid (via *A*) als de positie, wat niet mogelijk is volgens de kwantummechanica.

Het alternatief is dat *A* aan *B* laat weten (via een onbekende weg) dat van hem de snelheid is gemeten, zodat ook *B* de positie verborgen houdt. Maar als je *A* en *B* tegelijk meet, dan moet deze informatie met oneindige snelheid naar *B*, en dat kan niet volgens de relativiteitstheorie.

Einstein had het spottend over een *spukhafte Fernwirkung*, een spookachtige werking op afstand.

Wat vooraf ging?

In juni 1926 publiceerde *Max Born* een artikel, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge* in het wetenschappelijke tijdschrift *Zeitschrift für Physik*, waarin hij als eerste de probabilistische interpretatie van de kwantumgolffunctie duidelijk formuleerde. De kwantumgolffunctie was eerder dat jaar door *Erwin Schrödinger* geïntroduceerd. Born concludeerde het artikel als volgt:

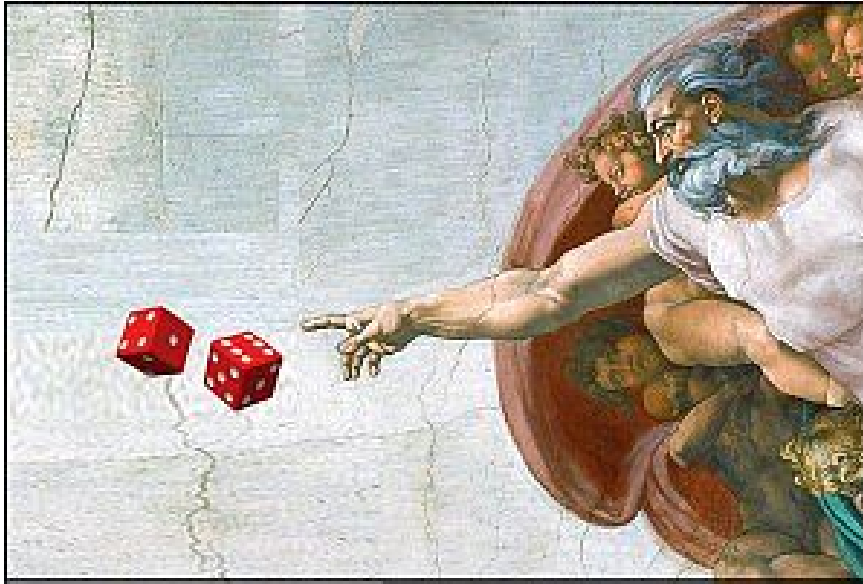
Hier komt het hele probleem van het determinisme aan de orde. Vanuit het standpunt van onze kwantummechanica is er geen grootheid die in een individueel geval de consequentie van de botsing causaal vastlegt; maar ook experimenteel hebben we tot nu toe geen reden om aan te nemen dat er enkele innerlijke eigenschappen van het atoom zijn die een definitieve uitkomst van de botsing bepalen.

Moeten we hopen later dergelijke eigenschappen te ontdekken en ze in individuele gevallen vast te stellen? Of moeten we geloven dat de overeenkomst tussen theorie en experiment wat betreft de onmogelijkheid om voorwaarden voor een causale evolutie voor te schrijven een vooraf vastgestelde harmonie is, die gebaseerd is op het niet bestaan van dergelijke voorwaarden? Zelf ben ik geneigd het determinisme in de wereld van atomen op te geven. Maar dat is een filosofische vraag waarvoor alleen natuurkundige argumenten niet doorslaggevend zijn.

Borns interpretatie van de golffunctie werd bekritiseerd door *Schrödinger*, die eerder had geprobeerd het in echte fysieke termen te interpreteren, maar het antwoord van *Albert Einstein* werd een van de vroegste en beroemdste beweringen dat de kwantummechanica onvolledig is:

Kwantummechanica verdient veel respect. Maar een innerlijke stem zegt me dat dit toch niet het echte artikel is. De theorie levert veel op, maar brengt ons nauwelijks dicht bij het geheim van de Oude. Ik ben er in ieder geval van overtuigd dat Hij niet aan het dobbelen is.

Niels Bohr antwoordde naar verluidt op Einsteins latere uiting van dit gevoel door hem te adviseren op te houden God te vertellen wat hij moet doen.



Het experiment

Door *David Bohm* is een praktisch uitvoerbare meting bedacht. Een vereenvoudigde omschrijving daarvan is deze:

Er is een bron die een elektronenpaar uitzendt waarvan beide elektronen *A* en *B* altijd een tegengestelde spin hebben. Spin kan voorgesteld worden als rotatie, links- of rechtsom, *up* of *down* genoemd. Dus is *A* up, dan is *B* down en omgekeerd. Beide elektronen schieten ieder een andere kant op, naar twee meetopstellingen op gelijke afstand van de bron.

Van *A* wordt nu de spin gemeten. Volgens de kwantummechanica wordt pas op dat moment, volstrekt willekeurig, bepaald wat de spin is, bijvoorbeeld *up*. Tegelijk wordt *B* gemeten en volgens de kwantummechanica is zijn spin nu met 100% zekerheid *down*. Als *A* niet zou zijn gemeten, dan is het resultaat van *B* **willekeurig** *up* of *down*.

In de vroege jaren 1980 voerde de natuurkundige *Alain Aspect* met een aantal medewerkers dit experiment uit. Hij toonde daarbij aan dat de kwantummechanische *spookachtige werking op afstand* werkelijkheid wordt, als twee deeltjes door een willekeurig grote afstand van elkaar worden gescheiden. Er blijft dan toch een correlatie tussen de golf functies in stand, aangezien beide deeltjes ooit deel uitmaakten van dezelfde golf functie, die pas werd verstoord, doordat een van de deeltjes werd gemeten.

Inderdaad blijkt het in het experiment zo te zijn. dat elektron *B* weet dat elektron *A* als up is gemeten en hij dus *down* moet zijn. De hypothese van de verborgen variabelen mag nu als verworpen worden beschouwd.

Wel dient opgemerkt te worden dat er op deze manier geen informatie kan worden uitgewisseld.

Datum aangemaakt

2023/08/07