



Hoe bewees Euclides dat een hoek recht is?

Beschrijving

Bij het bewijs van de *stelling van Pythagoras* [elders op deze site](#), is het nodig om aan te nemen dat sommige hoeken recht (90°) zijn. Ik vroeg mij af hoe *Euclides* dat in zijn fameuze boekwerken *Elementen*¹ had bewezen en ging op zoek.

Hoewel Euclides geen specifieke stelling presenteerde die een specifieke hoek als *recht* bewijst, bouwde hij een logisch systeem waarin de definitie van een rechte hoek en de eigenschappen ervan consistent werden toegepast.



Euclides van Alexandrië (rond 350? v.Chr.)

Definitie van een rechte hoek door Euclides

In *Boek I* van de *Elementen*, definieerde Euclides een rechte hoek als volgt:

1. Wanneer een lijn een andere lijn snijdt en de aangrenzende hoeken gelijk zijn, dan zijn deze hoeken rechte hoeken.
2. Een rechte hoek is dus exact de helft van een gestrekte hoek (180°), oftewel 90° .

Deze definitie (dus eigenlijk geen bewijs) legt de basis voor het concept van *alle* rechte hoeken in de meetkunde.

Hoe Euclides dit toepaste

Euclides gebruikte deze definitie om te bewijzen dat hoeken in specifieke situaties recht zijn. Hier zijn enkele voorbeelden:

1. **Constructie van een loodlijn:** In *Elementen* 1.11 bewees Euclides hoe een loodlijn kan worden getrokken vanuit een punt op een lijn, zodat de hoeken recht zijn.
2. **Gelijkheid van hoeken:** Hij bewees in diverse proposities dat wanneer een lijn de voorwaarden van een rechte hoek vervult (gelijke aangrenzende hoeken), de hoeken automatisch recht moeten zijn.

Het 'bewijzen' dat een hoek recht is, komt in Euclidische meetkunde dus neer op het aantonen dat het voldoet aan de gelijke verdeling van aangrenzende hoeken. Zijn aanpak was niet gericht op een specifieke hoek, maar op het opbouwen van een logisch consistent systeem waarin rechte hoeken correct worden gedefinieerd en gebruikt.

Wie was Euclides?

Euclides, ook **Euclides van Alexandrië** genoemd, was een wiskundige, die rond het jaar 300 v.Chr. werkzaam was in de bibliotheek van Alexandrië. Dat was tijdens de Hellenistische periode, de bloeitijd van het oude Griekenland.

Euclides wordt vaak de 'vader van de meetkunde' genoemd. Hij leefde tijdens het bewind van *Ptolemaeus de Eerste*² (323-283 v.Chr.) in Alexandrië. Zijn *Elementen* is het meest succesvolle handboek en een van de invloedrijkste werken in de geschiedenis van de wiskunde. Het deed vanaf het tijdstip van publicatie tot in de late 19e of vroege 20e eeuw, dienst als het belangrijkste leerboek voor het onderwijs in de wiskunde, vooral in de meetkunde. In dit werk worden de beginselen van wat nu de euclidische meetkunde wordt genoemd gededuceerd uit een kleine verzameling van axioma's. Euclides schreef ook werken over *perspectief*, *kegelsneden*, *bolmeetkunde* en *getaltheorie*.

Leven

Er is weinig bekend over het leven van Euclides, aangezien er in de overgebleven antieke werken slechts een handvol verwijzingen naar hem bestaan. In feite dateren de belangrijkste verwijzingen naar Euclides, van *Proclus*³ en *Pappos van Alexandrië*⁴, van eeuwen later.

Proclus schreef in zijn commentaar op de *Elementen*, en dat was in de 5e eeuw, maar kort iets over Euclides. Volgens hem was Euclides de schrijver van de *Elementen*, en werd hij genoemd door *Archimedes*. Toen *Ptolemaeus I* Euclides vroeg of er geen kortere weg naar de meetkunde bestond dan de *Elementen*, antwoordde Euclides volgens Proclus dat 'er geen koninklijke weg tot de meetkunde bestaat'.

Al hoewel dit vermeende citaat van Euclides door Archimedes nu wordt gezien als een inlassing door latere uitgevers van zijn werken, gelooft men nog steeds dat Euclides zijn werken vóór die van Archimedes schreef. Een reden om het citaat over de 'koninklijke weg' in twijfel te trekken is, dat er een vergelijkbaar verhaal bekend is met betrekking tot *Menaechmus*⁵ en *Alexander de Grote*⁶. In de enige andere belangrijke verwijzing naar Euclides vermeldt Pappos van Alexandrië in de vierde eeuw kort dat *Apollonius van Perga* 'lange tijd doorbracht met de leerlingen van Euclides in Alexandrië', en dat hij zich daar zijn natuurwetenschappelijke manier van denken eigen maakte.

Het is volgens velen mogelijk dat Euclides in het oude Athene aan de *Akademeia van Plato* heeft gestudeerd.

Datum en plaats van de geboorte van Euclides en ook zijn sterfdatum en de omstandigheden van zijn dood zijn niet nauwkeurig bekend, evenmin als een beschrijving hoe hij eruit zag. Er bestaat al helemaal geen portret van hem. Portretten van later datum zijn allemaal verzonnen.

¹ De **Elementen** is een meetkundig en rekenkundig verzamelwerk, bestaande uit dertien boeken, geschreven in het begin van de derde eeuw voor Christus. Hierin verzamelde en formaliseerde Euclides 468 wiskundige bewijzen die in de eeuwen daarvoor reeds door andere wiskundigen waren bewezen.

Elk boek bestaat uit twee delen:

- (I) definities (138 in totaal).
- (II) theorema's (468 in totaal) en de bewijzen voor die theorema's met behulp van definities en eerdere bewezen theorema's.

Alleen in het eerste boek komen ook nog vijf postulaten en vijf algemeenheden voor. Voor de meetkundige bewijzen mag men gebruikmaken van een passer (om cirkels te trekken) en een liniaal (om lijnen te trekken). Er wordt niet gemeten, noch met de passer, noch met de liniaal.

De inhoud van het werk voldoet aan de door *Plato* gestelde eis, dat de wiskunde losgemaakt dient te worden van het gebied van het materiële. Wiskundige kennis wordt volgens Plato alleen door denken verkregen. Men mag dus geen eigenschappen uit de figuur aflezen, maar men moest van elke eigenschap een streng bewijs geven en geen gebruik maken van figuren.

Volgens *Aristoteles* moet er bij het opbouwen van een wiskundig systeem uitgegaan worden van algemene inzichten die aan al het deductief denken ten grondslag liggen. Daarnaast moet gebruik gemaakt worden van speciale inzichten, waarin de existentie van de groundbegrippen gepostuleerd en hun betekenis vastgelegd wordt. Ten slotte moet men de overige begrippen definiëren met gebruikmaking van eerdere definities en de existentie van de gedefinieerde begrippen bewijzen,

In de *Elementen* is Euclides er redelijk in geslaagd zich te houden aan de voorschriften van Plato en Aristoteles.

De *Elementen* bestaan uit 13 boeken.

Boek I tot VI planimetrie.

Boek VII tot IX rekenkunde.

Boek X rationale getallen.

Boek XI tot XIII stereometrie.

² **Ptolemaeus de Eerste** was een veldheer onder *Alexander de Grote* en na diens dood koning van Egypte. Hij was de stichter van de Egyptische dynastie der Ptolemaeën.

In 322 v.Chr. kaapte hij in *Damascus* het konvooi dat Alexanders lijk vervoerde en hij liet het in *Memphis* begraven met een grootse plechtigheid. Later kreeg Alexander een monumentaal graf in de nieuwe hoofdstad *Alexandrië*. De symbolische waarde van het bezit van het lichaam van de voorganger was enorm. Rond deze tijd nam Ptolemaeus ook allerlei maatregelen om zijn militaire

macht uit te bouwen: hij bracht een eigen leger op de been, hij wist *Cyrene* (ten westen van Egypte) onder zijn gezag te krijgen en hij sloot verdragen met verschillende stadskoningen in *Cyprus*. Op deze manier bouwde hij een persoonlijke machtsbasis uit in Egypte, wat niet noodzakelijk wil zeggen dat hij het gebied van het Alexanderrijk wilde afscheuren.

³ **Proclus** (412-485) was een Grieks neoplatonisch filosoof, wiskundige en commentator van Euclides van Alexandrië.

⁴ **Pappos van Alexandrië** (290-350) was een van de laatste grote oud-Griekse wiskundigen uit de late oudheid. Hij staat bekend om zijn *Synagoge* of *Collectiones* (ca. 340) en om de naar hem genoemde zeshoekstelling van Pappos uit de projectieve meetkunde.

⁵ **Menaechmus** (380-320 v.Chr.) was een Griekse wiskundige en meetkundige, geboren in *Alopecennesus* (in het huidige Turkije), die bekend was door zijn vriendschap met de beroemde filosoof *Plato* en voor zijn klaarblijkelijke ontdekking van de kegelsneden en zijn oplossing voor het toen reeds oude probleem van kubusverdubbeling door gebruik te maken van parabolen en hyperbolen. Er zijn maar weinig directe bronnen voor Menaechmus's werk; zijn werk over kegelsneden is voornamelijk bekend van een epigram van *Eratosthenes*, en de prestaties van zijn broer (voor het bedenken van een methode om een vierkant te maken met een gelijke oppervlakte als een gegeven cirkel met gebruikmaken van de quadratrix).

Er wordt beweerd dat Menaechmus een leraar van Alexander de Grote was; deze veronderstelling is afgeleid van de volgende anekdote: naar verluidt vroeg Alexander hem eens naar de kortste weg om de meetkunde te begrijpen, waarop hij antwoordde: "O, Koning, om over de weg te reizen zijn er koninklijke wegen en wegen voor de gewone burgers, maar in de meetkunde is er maar één weg voor allen".

⁶ **Alexander de Grote** (356-323 v.Chr.) was koning van Macedonië. Hij veroverde het Perzische Rijk tot aan de *Indus*, waardoor hij een van de grootste rijken uit de oudheid creëerde.

Na de moord op zijn vader *Philippus* erfde Alexander een machtig koninkrijk en een ervaren leger. Hij hervatte het panhellenistische project van zijn vader door Macedonië en de Griekse *poleis* te verenigen in een coalitie vooraleer hij het Perzische Rijk binnenviel. In 334 v.Chr. vertrok hij naar Azië voor een veldtocht die tien jaar zou duren. Hij behaalde vele overwinningen tegen de Perzen, waarvan de *Slag aan de Granicus*, de *Slag bij Issos* en de *Slag bij Gaugamela* de belangrijkste waren.

Datum aangemaakt

2024/12/23